

宇宙学学习笔记

Chenhao Peng

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary

摘要. 没有什么想写的, 就是个学习笔记...

目录

Chapter 1. 宇宙学基本概念	1
1.1. 宇宙结构	1
1.2. 共动坐标, 哈勃定律, 红移	1
1.3. Fridman 方程	2
1.4. 流体方程	3
1.5. 宇宙介质	3
1.6. 光度距离	4
1.7. 回顾基础计算	6
1.8. 复合与退偶	8
Chapter 2. 文章阅读	9
2.1. COZMIC. I. Cosmological Zoom-in Simulations with Initial Conditions Beyond CDM	9

CHAPTER 1

宇宙学基本概念

1.1. 宇宙结构

宇宙结构 宇宙里的结构按照尺度排列：恒星，星系，星系群（一半十几个星系），星系团，超星系团，宇宙长城，空洞

星系：大麦哲伦，本群，仙女座星系（与银河系大小相近的最近的星系,770kPC)

宇宙长城：BOSS Great Wall and Sloan Great Wall.(13.7 亿光年)

星系团：室女座超星系团（本群所在星系团），发现他属于 LANIZKEA super cluster 其中的结构

空洞：宇宙长城的带状结构中间的空隙，（他的尺度是 50MPC）

1.2. 共动坐标，哈勃定律，红移

LEMMA 1.1 (宇宙学原理). 宇宙在大尺度上是均匀的且各向同性

共动坐标 物理坐标与共动坐标值差一个只与时间 t 有关的因子。叫做尺度因子 $a(t)$.

$$(1.1) \quad r(t) = a(t)x$$

哈勃定律 在物理坐标中，物体运动速度表示为

$$(1.2) \quad v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}(ax) = H(t)r(t)$$

LEMMA 1.2 (哈勃定律). 物理速度与物理距离成正比，比例系数 $H(t)$ 称为哈勃参数。

红移 考虑 λ_e 和 λ_r 分别是发出和接受到的波长。由于宇宙膨胀，定义：

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = 1 + z \quad z > 0$$

固有距离不变：($r = a(t)x$),

$$\Delta x = c \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \frac{\lambda_e}{c}}^{t_r + \frac{\lambda_r}{c}} c \frac{dt}{a(t)}$$

$$0 = \frac{\lambda_r}{a(t_r)} - \frac{\lambda_e}{a(t_e)}$$

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}$$

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \quad a(t_r) = 1$$

z 表示现在接受到的光线的红移。

1.3. Fridman 方程

宇宙均匀，球对称分布的质量密度为 $\rho(t)$ 的宇宙介质。以球心为坐标原点建立坐标系。在 r 处有质点 m 。所以他所受到的引力完全来自于球壳内部的介质。（半径为 r 内的球内）。球外介质贡献为 0。质点受到的引力势能是：

$$V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{4}{3}\pi r^2 G \rho m$$

质点的总能量：

$$U = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}\pi r^2 G \rho m = Const$$

把 $r = a(t)x$ 带入，得到：

$$\frac{2U}{ma^2x^2} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho$$

定义：

$$\frac{2U}{mx^2} = -kc^2$$

得到 F 方程：

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

注意，由于 H 以及 $\rho(t)$ 中都不含有坐标 x ，所以 k 是与坐标无关的。通过 k 的定义式， k 是与时间 t 无关的。所以 k 是一个常数。

对 F 方程的讨论

1 F 方程给出了 $H(t)$, $\rho(t)$ 和曲率 k 三者的关系。对当前 $t = t_0$, $a(t_0) = 1$ 时。

$$(1.3) \quad H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - kc^2$$

2 如果：

$$\rho(t) = \rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

则 $k = 0$ 。

ρ_c 称为临界密度 (critical)，如果 $\rho(t) > \rho_c(t)$, $k > 0$ 。反之 $k < 0$ 。

t 可以是任意时刻，对于当前 t_0 , $\rho_c(t_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ 。

$H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$ 其中 h 是一个待测的数值。

$1\text{Mpc} = 3.0869 \times 10^{22}m$, $G = 6.67 \times 10^{-11}m^3/kg/s$ Mpc 中的 M 指 million 百万。pc 指 parasec, 秒差距。

临界密度是 $\rho_c(t_0) = 1.88h^2 \times 10^{-26}kg/m^3$

考虑到太阳的质量 $M_\odot = 2 \times 10^{30}kg$

$\rho_c(t_0) = 2.78h^2 \times 10^{11}M_\odot/Mpc^3$

宇宙的实际密度与 $\rho_c(t_0)$ 差不多。

$\rho_c(t)$ 相当于 200L 的水里游一个质子。

k 测量结果大致是 0.7。

3 F 方程的另一种写法。

$$\frac{\rho}{\rho_c} - \frac{kc^2}{a^2H^2} = 1$$

方程左边两项都和时间相关，也可以理解为**密度参数**的加和关系（介质密度参数 + 曲率密度参数 = 1） $(\Omega + \Omega_k = 1)$ $\Omega = \sum_i \Omega_i$ 。

大体上说宇宙介质可以分为三类：

1. 非相对论物质，静能 $>$ （远大于）势能。2. 相对论物质，静能 $<$ （远小于）动能。光子，中微子，宇宙早期高温下的重粒子。3. 暗能量， ρ_Λ ，密度参数用 Ω_Λ ，具有负压强，能使宇宙加速膨胀。本性尚不明确。

1.4. 流体方程

两点考虑

1. 在绝热膨胀成立的尺度上选取任意大小的体积，则净流入和流出该体积的热能必须为 0。
2. 能量守恒

$$dE = dQ - pdV = -pdV$$

考虑一个单位半径的球体，物理体积：

$$V = \frac{4}{3}\pi(ax)^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

总质量： $m = \rho V$ ，总能量： $E = mc^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2$ 。

该体积内宇宙介质在膨胀过程中满足热力学第一定律。（绝热过程）

$$dE = TdS - pdV = -pdV$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi}{3} \left(3a^2 \frac{da}{dt} \rho c^2 + a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2 \right)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}$$

带入得到：

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

—导致宇宙介质能量变化的原因：

1. 宇宙膨胀导致密度降低（括号中的第一项）
2. 体积膨胀，介质通过压强对外做功（括号中的第二项）

—由于宇宙学原理，宇宙各处压强相等。（ $p = p(t)$ 不是 x 的函数，不存在压力，因为压强的梯度等于零）

—目前已经有了两个方程：

$$(1.4) \quad \text{F 方程} \quad H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

$$(1.5) \quad \text{流体方程} \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

得到：

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

由于 $\rho > 0, p > 0$ ，理论上宇宙减速膨胀，于是引入暗物质，导致 $p < 0$ 。

1.5. 宇宙介质

物态方程是关于 $p = p(\rho)$ 。宇宙学大多数时候考虑最简单的物态方程 $p = w\rho c^2$ (0: 非相对论物质，无压物质，尘埃。 $\frac{1}{3}$: 辐射，相对论物质。-1: 真空能或者宇宙学常数)

将以上假设带入流体方程：

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \rightarrow \rho(a) \propto a^{-3(1+w)}$$

当得到的 $\rho(a)$ 的关系带入 Friedmann 方程可以解出 $a(t)$ 。

辐射 光子：

$$m_\gamma = 0 \quad E = hf = \hbar\omega = pc$$

假设有一盒光子气体，处于平衡态，平衡温度是 T 。能量密度是

$$\epsilon(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{e^{hf/k_B T} - 1} df$$

数密度

$$n(f)df = \frac{\epsilon(f)df}{hf}$$

$$x = \frac{hf}{k_B T}$$

$$f_{n-peak} = 2.81 k_B T.$$

光子能量密度：

$$\epsilon_\gamma = \int \epsilon(f)df = \alpha T^4$$

光子数密度：

$$n_\gamma = \beta T^3$$

其中：

$$\alpha = \frac{8\pi k_B^4}{c^3 h^3} \frac{\pi^4}{15} = 7.565 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-4}$$

$$\beta = 2.029 \times 10^7 m^{-3} K^{-3}$$

一个光子的平均能量：

$$E_{mean} = \frac{E_{total}}{N} = \frac{\epsilon_r V}{nV} = \frac{\epsilon_r}{n} = 2.7 k_B T$$

微波背景辐射 当前

$$T_{CMB} = 2.7224 \pm 0.0006 K$$

能量密度：

$$\epsilon_{CMB} = 0.2606 MeV/m^3$$

质量密度：

$$\rho_{CMB} = 4.639 \times 10^{-31} Kg/m^3$$

密度参数：

$$\Omega_{CMB} = \frac{\rho_{CMB,0}}{\rho_{c,0}} \approx 2.47 \times 10^{-5} h^{-2}$$

1.6. 光度距离

根据光谱中是否有氢吸收线 \Rightarrow I 型（无），II 型（有）I 型中有两类（？）Ia 型 \Rightarrow 爆发机制（白矮星吸积其伴星上的物质，当其自身质量达到钱德拉塞卡极限 $M \sim 1.44 M_\odot$ 后 \rightarrow 爆炸，炸后不形成 BH、中子星）SNIa 非常亮，峰值光度（单位时间发出的能量） $L \approx (3 \sim 5) \times 10^9 L_\odot$ ，在 $z \sim 1$ 也能看到 \Rightarrow 光度大致相同，可作为光度已知的天体，称为标准烛光，从而得到距离光学：已知光度 L ，在距离 d 处测光通量（单位时间单位面积接收的光能） $F = \frac{L}{4\pi d^2}$ ，因此，知道 L + 测出 F 就可以知道 d 。（Note: 这里没有考虑朝向）光速有限，光发出到接收需要时间，这段时间内宇宙会膨胀，因此通过 $d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}$ 推出的距离称为光度距离 \neq 物理距离 **光度距离与物理距离之间的关系** 首先考虑收发光子的波长之间的联系。Recall 共动距离是不变的，光在 dt 时间内走过的共动距离为 $dx = c \cdot \frac{dt}{a(t)}$ 设 SNIa 在 t_e 和 $t_e + \frac{\lambda_e}{c}$ 时刻发出光子，地球上接收时间为 t_r 和 $t_r + \frac{\lambda_r}{c}$ ，有

$$\int_{t_e}^{t_e + \frac{\lambda_e}{c}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_r}^{t_r + \frac{\lambda_r}{c}} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_r}{a(t_r)} \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} = 1 + z$$

$$t_r = t_0, a(t_0) = 1 \Rightarrow \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t)} = 1 + z$$

由于膨胀, $a(t_r) > a(t_e) \Rightarrow z > 0$, 收到的光子波长是: $\lambda_r = (1+z)\lambda_e \Rightarrow E_r = (1+z)^{-1}E_e$, 频率: $f_r = f_e(1+z)^{-1}$ 。设 SNIa 在 $t_e \sim t_e + \Delta t_e$ 各向同性, 发出 N 个频率 f_e 的光子, 光度为 $L = \frac{Nhf_e}{\Delta t_e}$ 。设我们再 t_0 时收到这些光子, SN 与我们的物理距离为 r , 收到的光通量 $F = \frac{Nhf_r}{4\pi r^2 \Delta t_r}$, 其中 $\Rightarrow f_r = f_e(1+z)^{-1}$, $\Delta t_r = \Delta t_e(1+z)$ 从而光度距离与物理距离之间的联系是。

$$\frac{L}{F} = 4\pi r^2(1+z)^2 = 4\pi d_L^2 \Leftarrow d_L = r(1+z)$$

计算物理距离 传播到当前时刻光线和出发点之间到物理距离是。 $r = x = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$, 由关系 $z = \frac{1}{a} - 1 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a^2} \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} = -\frac{dz}{H}$, 光线传播到物理距离是 $r(z) = \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}$ 出发点: F 方程

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_{\Lambda}) - \frac{kc^2}{a^2},$$

由于 $\rho_{mat} = \rho_{mat,0} \cdot a^{-3}$, $\rho_{rad} = \rho_{rad,0} \cdot a^{-4}$, $\rho_{\Lambda} = const$, $a = (1+z)^{-1}$, 有

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 \frac{8\pi G}{3H_0^2} [\rho_{mat,0}(1+z)^3 + \rho_{rad,0}(1+z)^4 + \rho_{\Lambda} + \rho_K(1+z)^2] \\ &= H_0^2 [\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + \Omega_{rad,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{K,0}(1+z)^2] \end{aligned}$$

对 SNIa,

$$\begin{aligned} z \sim 1, \quad \Omega_{rad,0}, \Omega_{K,0} \ll 1 \Rightarrow \Omega_{mat,0} + \Omega_{\Lambda,0} \approx 1 \\ \Rightarrow \frac{r}{c} \frac{H_0}{c} = \int_0^z \frac{dz'}{[(1-\Omega_{\Lambda,0})(1+z')^3 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}} \end{aligned}$$

宇宙年龄 通过 F 方程:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot}$$

其中

$$\rho_{tot} = \rho_{mat,0}a^{-3} + \rho_{rad,0}a^{-4} + \rho_{\Lambda,0} + \rho_{K,0}a^{-2}$$

在方程的两端同时乘以 $\frac{a^2}{H_0^2}$ 于是 $\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

$$\frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_{mat,0}a^{-1} + \Omega_{rad,0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + \Omega_{K,0}}$$

考虑到

$$\Omega_{rad,0}, \Omega_{K,0} \ll 1, \quad \Omega_{mat,0} \approx 1 - \Omega_{\Lambda,0} \approx 0.31$$

$$\int_0^{t_0} dt = t_0 \approx \int_0^1 \frac{da}{H_0 \sqrt{\Omega_{mat,0}a^{-1} + (1 - \Omega_{mat,0})a^2}}$$

对 a 积分得到:

$$t_0 = \frac{0.955}{H_0} = 0.955t_H$$

带入 $H_0 = 68 \text{ km/s/Mpc}$, 其中 $1 \text{ Mpc} = 3.068 \times 10^{22} \text{ m}$ 于是 $t_H = 144$, 于是宇宙年龄:

$$t_0 \approx 137.4$$

地质学说: 地球年龄是 50 亿年。

核年代学: 星系盘中的铀 100 亿年。

古老球状星团: 100-130 亿年

可观测半径 光速有限, t_0 有限, 可见宇宙也是有限的。粒子视界半径: 指的是在 $t = 0$ 时, 发出的光子在 t_0 时被接收到, 这个时间段中光走过的物理距离。(固有距离)

光子在 $t_e \rightarrow t_r$ 内走过的共动距离。

$$x = c \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)} \quad a(t_0) = 1$$

当前宇宙的视界半径:

$$d_H = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

由于:

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a^2} = -\frac{\dot{a}}{a} \frac{1}{a}$$

$$\frac{dt}{a} = -\frac{dz}{H}$$

$$d_h = c \int_0^{+\infty} \frac{dz'}{H(z')}$$

由 H 方程: 并且: $a^{-3} = (1+z)^3$, $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{mat,0}$

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + (1 - \Omega_{mat,0})}$$

于是

$$d_h \approx ct_H 3.2 = 14000 Mpc$$

实际上, 我们看到的最远的星系, $z \approx 10$, 于是物理距离:

$$ct_H \int_0^{10} \frac{dz'}{\sqrt{\dots}} \approx 2.18 ct_H = 9500 Mpc = \frac{2}{3} d_H$$

1.7. 回顾基础计算

尺度因子 $a(t)$, 物理距离(固有距离)无法测量。可以测量发光天体的红移 z 。红移和尺度因子之间有关系

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1$$

常常将红移作为宇宙演化的主要变量。已知红移的大小可以知道发光天体的很多性质。

红移 z 对应的宇宙年龄 ($a(t)$ 中的 t 是多大, 也就是发光时候的宇宙年龄是多少。) 或者理解为时间坐标, 坐标的原点就是大爆炸发生的时候 ($t=0$)。

求导得到:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{a} &= -\frac{dz}{H} \\ dt &= -\frac{dz}{H} a \\ dt &= -\frac{dz}{H} (1+z)^{-1} \\ \int_0^{t_e} dt &= \int_z^{+\infty} \frac{dz}{1+z} \frac{1}{H} \end{aligned}$$

其中, z 是测量得到的红移值, $+\infty$ 是在宇宙大爆炸时的红移值。

红移与共动距离，视界半径 已知红移，还可以计算与 z 相关的距离。一个是发光体和我们之间的共动距离，

$$d_p = \int_{t_e}^{t_r} c \frac{dt}{a(t)} = c \int_0^z \frac{dz'}{H}$$

当前时刻的共动距离 = 当前时刻的物理距离

二是红移 z 对应的视界半径。(红移为 z 时刻到可观测半径)

$$d_h(z) = c \int_{t=0}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = c \int_z^\infty \frac{dz'}{H}$$

哈勃常数 上面的计算中需要用到哈勃参数，考虑 F 方程。

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{mat,0}(1+z)^3 + \Omega_{rad,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2}$$

当前时刻：

$$\Omega_{mat,0} + \Omega_{rad,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1$$

其中：

$$\Omega_{\Lambda,0} = 0.69 \quad \Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{mat,0} - \Omega_{rad,0}$$

在早期宇宙 (z 很大)，演化为辐射主导，这时候不能够忽略辐射项。

利用 $\rho_{rad} = \rho_{rad,0} a^{-4}$ $\rho_{mat} = \rho_{mat,0} a^{-3}$ $\rho_{\Lambda} = \text{常数}$ 可以得到两个重要时刻：

辐射-物质等量

$$\rho_{rad,0} a_{rm}^{-4} = \rho_{mat,0} a^{-3}$$

$a_{rm} \sim 2.9 \times 10^{-4}$ $z_{rm} = \frac{1}{a_{rm}} - 1 \approx 3443$, 实际上现在接收到的最大的红移值是 10 左右。 $t_{rm} \approx 5$ 万年 世界半径: $d_h(t_{rm}) = 112 Mpc$. $d_h(t_0) = 14000 Mpc$. 两者的比例大约是 125.

物质和暗能量等量期

$$\rho_{mat}(a_{m\Lambda}) = \rho_{\Lambda} \Rightarrow a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{mat,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} = 0.77$$

, 当时宇宙是现在宇宙的 77%。 $z_{m\Lambda} = 0.3$ $t_{m\Lambda} = 101$, (现在的 30 亿年前), 视界半径: $d_h(t_{m\Lambda}) = 12880 Mpc$.

所以宇宙的发展是从辐射主导时期 \rightarrow 物质主导时期 \rightarrow 暗能量主导时期。

温度与 $a(t)$ 的关系 求解流体方程 $\rho_{rad} \sim a^{-4}$, 由于统计物理 $\rho_{rad} \sim \epsilon \sim T^4$, 所以 a 与温度的关系是 $a \sim T^{-1}$.

非相对论/相对论粒子数守恒 宇宙微波背景辐射 $T=2.725K$, 黑体谱的能量密度: $\epsilon = \alpha T^4 = 0.2606 MeV/m^3$, 辐射: $\epsilon_{\gamma} = \rho_{\gamma} c^2$, $T \sim a^{-1}$

$$T = T_0 a^{-1} \approx 3 a^{-1} = 3(1+z) \quad n_{\gamma} = \beta T^3 \sim a^{-3}$$

对于非相对论粒子, $\rho_{mat} = n_{mat} \times m_0 \sim a^{-3} \Rightarrow n_{mat} \sim a^{-3}$. 发现和相对论物质的粒子数密度的变化规律是一样的。

稳定的粒子的总数 N 是守恒的。宇宙膨胀的时候, $n = \frac{N}{V} \sim \frac{N}{a^3} \sim a^{-3}$ 。

没有相互作用的时候, N 是守恒的,

有相互作用时候, 如果反应达到了某种平衡时。粒子数目也守恒

$$H + \gamma \rightarrow p + e^{-1}$$

只有在有相互作用, 平衡被破坏时候, 粒子数不守恒。(比如上面的反应粒子数就是守恒的)

1.8. 复合与退偶

退偶 退偶意思是 $H = \Gamma$ ，其中 Γ 是反应的散射截面。随着宇宙发展， H 会越来越小。

复合 比如说反应

$$H + \gamma \rightarrow p + e^{-}$$

复合的意思是，随着温度的降低，或者说宇宙的演化。几乎所有的 $p + e^{-}$ 都反应成了 $H + \gamma$ 。

文章阅读

2.1. COZMIC. I. Cosmological Zoom-in Simulations with Initial Conditions Beyond CDM

* **Warm dark matter** 这种暗物质可以用来在 hot dark matter 以及 cold dark matter 中传导力。WDM 的候选者有 sterile neutrino, gravitinos, WIMPs (produced not thermally). * **Fuzzy cold dark matter** 这是一种 cold dark matter, 可以解决 cuspy halo problem。Cuspy halo problem 是指低质量星系的暗物质密度分布与宇宙学 N 体模拟预测的密度分布之间的差异。几乎所有的模拟都形成了具有“尖峰”暗物质分布的暗物质晕。Fuzzy 由超轻标量粒子组成, 它们的能量量级在 $10^{22}eV$. Compton 波长达到了 1 光年。它们在星际尺度仍然保持波函数的性质。Cuspy 问题会因为海森堡测不准原理被规避掉。波函数的性质会导致暗物质晕中 (dark matter halo center) 有球形孤立子核心 (spherical soliton cores); 暗物质网丝 (dark matter cosmic web filaments) 中有柱状孤立子核心 (cylindrical soliton-like cores)。

物质功率谱 matter power spectrum 首先定义物质的 over-density. 定义为没有量纲的量

$$(2.1) \quad \delta(x) = \frac{\rho(x) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}.$$

之后定义关联函数

$$(2.2) \quad \xi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \int d^3x \delta(x) \delta(x - \mathbf{r})$$

考虑这个关联函数的傅里叶展开谱

$$(2.3) \quad \xi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

在大尺度 (k 小) 由于宇宙膨胀的影响, 重力坍缩较弱, 结构的形成遵循线性理论。此时功率谱 $P(k) \propto k^{n_s}$, 其中 n_s 是标量谱指数。一般接近 1。

在小尺度上 (k 大) 重力坍缩变为非线性, 星系和星系团等结构开始形成。为了准确模拟这些尺度, 通常需要进行 N 体模拟。在这些尺度上, 功率谱的行为为 $P(k) \propto k^{n_s-1}$ 。其中指数根据模型的不同会有所变化。

功率谱中存在一个特征性的转折点, 即从随着 k 增加到随着 k 减少的过渡点。这个转折发生在平衡尺度 k_{eq} 处, 代表着物质-辐射平衡的发生, 并标志着宇宙结构生长的转变。比如说 $k_{eq} \simeq 2 \times 10^{-2} h \text{ Mpc}^{-1}$

